Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 1

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -2$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 4. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 2/r$, равен $p = 3$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 2. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r - 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3/(r + \varepsilon)$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $3a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -2/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 2\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $2e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 2

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -2/r$, равен $p = 4$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -1/r$ с расстояния 2. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2(r + \varepsilon)/r^2$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -3/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/2$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -4/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 4\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $4e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{8}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 3

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 3/r$, равен $p = 6$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -4/r$ с расстояния 3. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 1/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -4r^{-1}\cos\sqrt{\varepsilon/r}$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -4/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $4a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -5/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 5\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $5e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{10}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 4

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 4$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -3/r$, равен $p = 1$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -5/r$ с расстояния 2. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r + 5/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2/[r(1 + \sin(\varepsilon/r))]$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -5/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/3$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -7/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 7\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $7e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{14}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 5

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 4$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 1/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -6/r$, равен $p = 4$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -6/r$ с расстояния 1. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r - 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r - 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2/(r + \varepsilon)$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $4a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -2/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 2\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $2e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{4}[\mathbf{FM}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{FM}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 6

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 1/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -5/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -2$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 4. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 1/r$, равен $p = 2$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -7/r$ с расстояния 3. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r - 6/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r + 2/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2(3r + \varepsilon)/r^2$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -5/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $2a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -4/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 4\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $4e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{8}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 7

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -5/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -2$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 5$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 1/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -2/r$, равен $p = 5$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 2. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r + 2/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2r^{-1} \cos \sqrt{2\varepsilon/r}$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -5/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/4$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha \dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -7/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 7\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $7e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{14}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 8

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 5$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -5/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 3/r$, равен $p = 6$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -4/r$ с расстояния 1. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -5/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3/[r(1 + 2\sin(\varepsilon/r))]$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -4/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $3a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -8/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 8\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $8e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{16}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 9

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -1$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 5. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -6/r$, равен $p = 7$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -5/r$ с расстояния 3. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r - 5/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r - 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -5/(2r + \varepsilon)$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -1/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $7a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -4/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 4\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $4e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{8}[\mathbf{FM}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{FM}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 10

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -1$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 3/r$, равен $p = 5$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 4. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 4/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -7/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3(5r + \varepsilon)/r^2$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/5$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -5/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 5\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $5e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{10}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 11

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 2$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 1. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -1/r$, равен $p = 9$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -5/r$ с расстояния 1. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r - 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2r^{-1} \cos \sqrt{\varepsilon/3r}$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -3/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $6a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -7/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 7\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $7e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{14}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 12

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 2$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -2$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 3/r$, равен $p = 3$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -1/r$ с расстояния 2. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r + 2/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3/[r(2 + \sin(\varepsilon/r))]$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $6a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -4/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 4\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $4e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{8}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 13

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -2$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 2$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -5/r$, равен $p = 3$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -7/r$ с расстояния 2. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 5/r - 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r - 2/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3/(3r + \varepsilon)$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/4$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -2/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 2\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $2e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 14

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 2$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 4$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 4/r$, равен $p = 4$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 5. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r - 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2(2r + \varepsilon)/3r^2$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -4/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $3a/2$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -7/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 7\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $7e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{14}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 15

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = 4$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = -3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -4/r$, равен $p = 2$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -7/r$ с расстояния 1. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 4/r + 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r + 7/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3r^{-1} \cos \sqrt{2\varepsilon/r}$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -5/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $2a/3$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -5/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 5\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $5e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{10}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 16

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = -3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 4. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 3/r$, равен $p = 5$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 4. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -4/[r(3 + \sin(\varepsilon/r))]$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/5$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -4/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 4\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $4e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{8}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 17

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 1$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -5/r$, равен $p = 4$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -2/r$ с расстояния 6. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r - 2/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r + 2/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3/(4r + \varepsilon)$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/7$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -5/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 5\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $5e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{10}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 18

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 1$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 3/r$, равен $p = 1$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 8. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r - 5/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r - 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2(3r + \varepsilon)/3r^2$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -5/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $7a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -4/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 4\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $4e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{8}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 19

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 1$, энергия $E = -3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. Ее момент импульса равен $M = 4$, энергия $E = 1$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 1. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -6/r$, равен $p = 2$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 9. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 5/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r + 5/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2r^{-1}\cos\sqrt{\varepsilon/3r}$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -3/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $4a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -2/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 2\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $2e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 20

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. Ее момент импульса равен $M = 4$, энергия $E = 1$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 5. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 5/r$, равен $p = 4$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 10. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r - 2/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2/[r(1 + \sin(2\varepsilon/r))]$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -1/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/4$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -7/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 7\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $7e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{14}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 21

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = -1$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 4. Расстояние до центра при этом равно 1. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -2/r$, равен $p = 7$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -5/r$ с расстояния 2. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 4/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r + 3/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -3/(2r + \varepsilon)$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/3$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -4/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 4\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $4e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{8}[\mathbf{FM}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{FM}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 22

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = -1$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 3$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 1/r$, равен $p = 6$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 7. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r - 4/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r - 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -5(2r + \varepsilon)/2r^2$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -6/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/6$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -5/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 5\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $5e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{10}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 23

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. Ее момент импульса равен $M = 3$, энергия $E = 3$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 4$, энергия $E = 2$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -4/r$, равен $p = 9$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 9. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 5/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r + 7/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2r^{-1}\cos\sqrt{3\varepsilon/r}$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -3/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $a/5$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте "уравнения движения" (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -2/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 2\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $2e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 24

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. Ее момент импульса равен $M = 4$, энергия $E = 2$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -5/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = -1$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. Во сколько раз отличаются большая и меньшая оси орбиты?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = 5/r$, равен $p = 7$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -3/r$ с расстояния 8. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -6/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -1/r - 5/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -4/[r(3 + \sin(\varepsilon/r))]$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -3/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $5a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -7/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 7\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $7e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{14}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{F}\mathbf{M}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.

Домашнее задание №10

Кеплерова задача

Вариант 25

1. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -5/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = -1$. Получите уравнение траектории. Изобразите ее схематически.

2. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. Ее момент импульса равен $M = 2$, энергия $E = 2$. Получите зависимость от времени (в параметрическом виде) расстояния от частицы до центра, угловой скорости, декартовых координат и модуля скорости. На какой угол повернется направление скорости частицы за все время ее движения в поле?

3. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 4. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

4. Параметр параболической орбиты частицы массой $m = 2$, движущейся в поле $U = -6/r$, равен $p = 8$. Найдите уравнение траектории частицы. Чему равна ее скорость в момент времени, когда расстояние до центра равно 10? Чему равно минимальное расстояние до центра и скорость частицы в этот момент?

5. Найдите время падения тела массой $m = 4$ в центр поля $U = -4/r$ с расстояния 6. Начальная скорость тела направлена к центру поля и равна 3. Считайте траекторию вырожденным эллипсом и воспользуйтесь постоянством секториальной скорости.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 1/r + 7/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса, налетая из бесконечности, она не упадет в центр поля? Получите в этом случае траекторию частицы. На какой угол повернется вектор ее скорости за все время движения в поле?

7. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -7/r + 1/r^2$. При каких значениях энергии и момента импульса ее движение финитно (но частица не падает в центр поля)? Получите уравнение ее траектории, периоды радиальных колебаний и обращения. В каком случае траектория замкнута?

8. Рассмотрим движение частицы массой $m = 2$ в поле $U = -2/(3r + \varepsilon)$, где ε – параметр, малый по сравнению с размерами траектории. Энергия частицы E, момент импульса M. Орбита обращения в таком поле будет прецессировать. Найдите угол, на который повернется направление на перигелий, за один период движения. Чему равна угловая скорость прецессии орбиты?

9. На частицу, движущуюся в поле $U = -2/r$ по эллиптической орбите с полуосями a и $4a$, действует сила трения $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$, медленно меняющая траекторию. Найдите изменение энергии, момента импульса, осей орбиты за период. Составьте “уравнения движения” (дифференциальные уравнения первого порядка) для медленно меняющихся энергии и момента импульса. За какое время момент импульса уменьшится в два раза?

10. Частица массы $m = 2$ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и параметром p_0 в поле $U = -5/r$. Для исследования малых изменений орбиты, происходящих от действия на частицу дополнительной малой силы, удобно следить за изменениями векторов $\mathbf{M}$ (момент импульса) и $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - 5\mathbf{r}/r$ (модуль этого вектора равен $5e$, а направлен он от центра поля к перигелию орбиты). В качестве дополнительной силы рассмотрим постоянную силу F, действующую в плоскости орбиты. Считая изменения векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{A}$ за период обращения малыми, докажите, что для них справедливы такие уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \dfrac{3a}{10}[\mathbf{FM}], \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{3}{4}[\mathbf{FM}], \end{cases}$$

где a – большая полуось орбиты. Найдите закон изменения со временем момента импульса, эксцентриситета и параметра орбиты.